Научная статья
УДК 336.5(470-25):519.216.8

Вероятностные модели в динамике финансирования городских проектов

Шамин Роман Вячеславович — доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой информационных технологий и математики, Университет Правительства Москвы (107045, Россия, г. Москва, ул. Сретенка, д. 28), eLIBRARY SPIN-код: 8966–0169, ShaminRV@edu.mos.ru

Голованова Наталия Борисовна — доктор экономических наук, профессор, заместитель первого проректора, МИРЭА — Российский технологический университет (119454, Россия, г. Москва, проспект Вернадского, д. 78), eLIBRARY SPIN-код: 7197–9948, golovanova@mirea.ru

В статье рассматривается применение вероятностных моделей к анализу динамики расходов на финансирование городских проектов. В качестве математического инструментария используется разложение Дуба для дискретного субмартингала. Описывается общий подход к моделированию роста расходов, основанный на представлении динамики финансирования в виде случайного процесса, состоящего из мартингала и компенсатора. В рамках предложенной модели компенсатор отражает запланированный рост расходов, а мартингал представляет случайные отклонения от плана. Для проверки применимости модели на практике был проведен анализ финансирования проектов в Москве. В ходе исследования выделены трендовые компоненты расходов и случайные остатки, которые затем были проверены на мартингальное свойство с помощью теста Льюнг — Бокса. Результаты анализа свидетельствуют об отсутствии статистически значимой автокорреляции, что подтверждает возможность интерпретации их как мартингала в разложении Дуба. Полученные выводы позволяют использовать предложенный метод для прогнозирования и анализа устойчивости бюджетного финансирования, а также для оценки влияния случайных факторов на реализацию городских проектов.

Ключевые слова: финансирование проектов, городские проекты, субмартингалы, разложение Дуба.

Для цитирования: Шамин Р. В., Голованова Н. Б. Вероятностные модели в динамике финансирования городских проектов // Вестник Университета Правительства Москвы. 2025. № 1. С. 19–25.

Article

Probabilistic Models in the Dynamics of Urban Projects Financing

Roman V. Shamin — Doctor of Physical and Mathematical Science, Chair of Information Technologies and Mathematics, Moscow Metropolitan Governance Yuri Luzhkov Univesity (28 Sretenka ulitsa, Moscow, 107045, Russia), eLIBRARY SPIN-code: 8966-0169, ShaminRV@edu.mos.ru

Nataliya B. Golovanova — Doctor of Economics, Professor, Deputy First Vice-Rector, MIREA — Russian Technological University (78 Vernadskogo prospect, Moscow, 119454, Russia), eLIBRARY SPIN-code: 7197-9948, golovanova@mirea.ru

This article explores the application of probabilistic models to analyze the expenditure dynamics of urban project financing. We employ Doob's decomposition for discrete submartingales as a mathematical framework. A general approach to modeling expenditure growth is described, based on representing the financing dynamics as a stochastic process consisting of a martingale and a compensator. Within the proposed model, the compensator reflects the planned expenditure growth, while the martingale represents random deviations from the plan. To validate the model's applicability, we analyzed project financing data from Moscow. The study identified trend components and random residuals, which were then tested for the martingale property using the Ljung-Box test. The analysis indicates a lack of statistically significant autocorrelation, supporting their interpretation as a martingale in Doob's decomposition. The findings suggest that the proposed method can be used for forecasting and analyzing the sustainability of budgetary financing, as well as for assessing the impact of random factors on the implementation of urban projects.

Keywords: project financing, urban projects, submartingales, Doob decomposition.

For citation: Shamin R. V., Golovanova N. B. Probabilistic Models in the Dynamics of Urban Projects Financing. *MMGU Herald*, 2025, no. 1, pp. 19-25. (In Russ.).

Введение

Современный этап развития муниципального управления характеризуется активным использованием проектного подхода, который все больше применяется для решения масштабных социально-экономических задач. В отчете Мэра Москвы С. С. Собянина о результатах деятельности Правительства Москвы от 25.12.2024 было изложено видение развития города под названием «Москва-2040» [1]. Согласно представленным планам, столица должна стать городом с сильной и устойчиво развивающейся экономикой, а также комфортной городской средой, предоставляющей равные возможности для всех ее жителей. Для достижения поставленных целей необходимо реализовывать проекты, что требует рационального распределения финансовых ресурсов между всеми городскими инициативами.

С одной стороны, расходы на городские проекты можно спланировать с высокой точностью на несколько лет вперед. С другой стороны, финансовая сфера подвержена влиянию множества факторов, которые зачастую сложно предсказать, а также воздействию случайных обстоятельств.

Следовательно, возникает актуальная задача: найти математические инструменты для анализа связи между жесткими требованиями планирования устойчивого роста расходов на городские проекты и случайными факторами, которые могут существенно повлиять на принимаемые решения при финансировании городских проектов. При этом следует учитывать социальную и экономическую важность принимаемых решений [2].

Активное развитие проектной деятельности в государственном управлении, особенно заметное после принятия Постановления Правительства Российской Федерации от 31.10.2018 № 1288 (ред. от 21.02.2025) «Об организации проектной деятельности в Правительстве Российской Федерации», подчеркивает важность качественного и своевременного выполнения проектов, что в свою очередь напрямую связано с эффективным управлением финансами в рамках каждого проекта. Это означает, что финансирование проекта должно осуществляться с использованием аналитического инструментария, важной составляющей которого являются математические инструменты. Один из таких инструментов — вероятностные модели для анализа роста расходов на финансирование городских проектов, основанные на мартингальных и субмартингальных случайных процессах. Работа построена по принципу «от теории к практике». Сначала мы разрабатываем абстрактную математическую модель, описывающую динамику расходов на реализацию городских проектов, а затем применяем эту модель к конкретному случаю — финансированию проектов в Москве, используя данные официальной статистики [3].

Постановка задачи

Рассмотрим задачу анализа распределения расходов на проект в течение N лет. Введем обозначения: T_n — объем финансирования проекта в n-м году, $n = 1, 2, \ldots, N$.

Мы будем считать, что $n = 1$ соответствует $Y - N$ календарному году, если Y — это последний календарный год в нашем исследовании.

Если среди рассматриваемой последовательности объемов финансирования присутствуют данные за прошлые года, то эти значения являются фактическими значениями объемов финансирования, а значения последовательности, относящиеся к будущим годам, являются планируемыми.

Поскольку в современных условиях все значимые расходы на регулярные проекты подвержены тщательному планированию [2], то можно без ограничения общности считать, что в начальный момент $n = 0$ все значения последовательности T_n являются планируемыми, а по окончании года N все значения T_n являются фактическими расходами.

Как будет показано в следующем разделе, последовательность T_n можно рассматривать как случайный процесс, имея в виду, что планируемые значения задают распределение вероятности для траекторий случайного процесса, а наблюдаемые значения последовательности T_n — это реализованные объемы финансирования проекта.

Основной задачей, решаемой в настоящей работе, является выявление закономерностей в соотношении между планируемым и фактическим объемами финансирования проектов.

Субмартингальная модель случайного процесса

Рассмотрим величины T_n как реализации некоторого дискретного случайного процесса, который мы также будем обозначать через T_n. Для построения случайного процесса будем рассматривать фильтрованное вероятностное пространство $< \Omega, A, \{A_n\}, P >$, где Ω — это пространство элементарных исходов, A — сигма-алгебра событий, $\{A_n\}$ — поток сигма-алгебр событий, доступных в момент n, который также называется фильтром сигма-алгебр событий [4]. Этот поток должен удовлетворять следующим условиям:

$$A_n \subset A_n+1 \subset A.$$

Мы используем P в качестве вероятностной меры.

Рассматриваемый нами случайный процесс T_n должен быть согласован с фильтром событий. T_n измерима относительно сигма-алгебры A_n.

Кроме того, мы будем предполагать, что сигма-алгебра A_n порождается следующими случайными величинами:

$$A_n = \sigma\,(T_1, T_2, \ldots, T_n).$$

Поскольку все величины T_n являются ограниченными:

$$0 \leq T_n \leq C,$$

где C — это некоторая константа, то и все наши случайные величины T_n будут иметь первые два момента: математическое ожидание $E[T_n]$ и дисперсию $D[T_n]$.

Сделаем важное предположение. Мы будем считать, что рассматриваемые нами проекты удовлетворяют свойству неубывания планируемых объемов финансирования. Для крупных городских проектов это условие является достаточно естественным. В наших обозначениях это означает следующее:

$$E[T_{n+1}|A_n] \geq T_n.$$

Здесь через $E[T_{n+1}|A_n]$ обозначено условное математическое ожидание случайной величины T_{n+1} относительно сигма-алгебры A_n. Это будет означать, что ожидаемое (планируемое) финансирование проекта в $n + 1$ году должно быть не меньше, чем объем финансирования в n-м году.

В результате мы приходим к выводу, что наш случайный процесс T_n является субмартингалом [4].

Разложение Дуба для представления субмартингала

В предыдущем разделе мы показали, что случайный процесс T_n является субмартингалом. Субмартингальное свойство позволяет применить к рассматриваемой последовательности объемов финансирования разложение Дуба.

Прежде чем сформулировать результат о разложении Дуба, напомним дефиниции понятий мартингала и предсказуемой последовательности. Для определенности мы будем рассматривать то же фильтрованное вероятностное пространство, что и для субмартингала T_n.

Случайная последовательность X_n называется мартингалом, если выполняются следующие условия:

1. Случайная величина X_n является A_n-измеримой.
2. Существует конечное математическое ожидание $E[X_n] < \infty$.
3. Выполняется мартингальное равенство:

$$E[X_{n+1}|A_n] = X_n.$$

Последнее равенство утверждает, что наилучшее предсказание о значениях мартингала в будущем (при известных событиях к настоящему моменту) совпадает с текущим значением мартингала.

Само понятие мартингала возникло при анализе различных стратегий ставок в азартных играх. При этом получается, что если мы хотим предсказать будущее мартингала, то никакое знание событий до настоящего момента не оказывает влияния на будущие значения мартингала. В этом случае можно говорить, что мартингал является «чистой случайностью».

В противоположность мартингалу мы будем рассматривать предсказуемые случайные последовательности. Последовательность Y_n называется предсказуемой последовательностью, если Y_n является A_{n-1}-измеримой. Это означает, что если нам известны все события до настоящего момента n (включительно), то мы однозначно можем предсказать значение Y_{n+1}. Заметим, что, хотя предсказуемая последовательность Y_n и может быть предсказана на шаг вперед, она не является детерминированной, поскольку зависит от предыдущих событий.

Замечательным результатом для субмартингалов является разложение Дуба [5], которое в нашем случае утверждает, что субмартингал может быть представлен в виде суммы мартингала и предсказуемой последовательности. В наших обозначениях это можно представить следующей формулой:

$$T_n = M_n + K_n,$$

где M_n является мартингалом, а K_n является предсказуемой последовательностью. Здесь мы предполагаем, что $T_0 = 0$, $M_0 = 0$ и $K_0 = 0$.

При этом последовательность K_n удовлетворяет условию:

$$K_n \leq K_{n+1},$$

т. е. предсказуемая последовательность является неубывающей.

При этом представленное разложение является единственным.

В разложении Дуба предсказуемую последовательность K_n часто называют компенсатором.

Для нас принципиальным является то, что вид компенсатора (предсказуемой последовательности) может быть восстановлен с использованием условного математического ожидания.

Последовательность K_n имеет следующий вид:

$$K_n = (E[T_1|A_0] - T_0) + (E[T_2|A_1] - T_1) + \dots + (E[T_n|A_{n-1}] - T_{n-1}).$$

При этом мы можем получить и выражение для мартингала по следующей формуле:

$$M_n = T_n - K_n.$$

Эти явные формулы позволят найти финансовую интерпретацию субмартинагального разложения.

Финансовая интерпретация субмартингального разложения

Несмотря на кажущуюся сложность формулы для компенсатора K_n, эта последовательность имеет достаточно простую и понятную структуру. Количество слагаемых в K_n соответствует номеру шага в последовательности. При этом каждое слагаемое представляет собой разность между прогнозируемым значением объема финансирования на следующий год, рассчитанным на основе текущей информации, и фактическим уровнем финансирования на текущий момент.

Рассмотрим более подробно финансовую интерпретацию субмартингального разложения Дуба. Значения дискретного случайного процесса T_n будем интерпретировать как фактические затраты на реализацию городского проекта.

Сигма-алгебры A_n будем интерпретировать как все события, которые доступны в n-м году. При этом сигма-алгебра A_n содержит события, как произошедшие в n-м году, так и не произошедшие в этом году, но важно, что мы точно знаем, какие события из сигма-алгебры A_n произошли, а какие не произошли.

Условное математическое ожидание относительно сигма-алгебры $E[T_{n+1}|A_n]$ мы будем интерпретировать как планируемый объем финансирования городского проекта $n + 1$ год в реалиях n-го года. Вообще говоря, условное математическое ожидание T_m относительно сигма-алгебры A_n, где $m > n$, интерпретируется как планирование объема финансирования городского проекта в m-м году в реалиях n-го года и обозначается следующим образом:

$E[T_m|A_n]$ — планируемый объем финансирования проекта.

Как мы уже отмечали, планируемые объемы финансирования городских проектов на следующий год всегда выше, чем реальное финансирование в текущем году. Это условие гарантирует, что случайный процесс T_n является субмартингалом.

Хотя планируемые объемы финансирования городских проектов увеличиваются, реальные объемы финансирования отдельных проектов могут и не обладать этим свойством. Поэтому, вообще говоря, возможна ситуация, когда $T_{n+1} < T_n$.

Схему планирования объемов финансирования городских проектов можно представить следующим образом.

1. Планирование объемов финансирования на N лет. Обозначим через P_n планируемый объем финансирования на n-й год. Эти величины можно интерпретировать как условные математические ожидания:

$$P_n = E[T_n|A_0].$$

2. После каждого года мы получаем реальный объем финансирования T_n.

3. Перед началом нового года уточняются объемы финансирования на следующий год с учетом реалий текущего года. Это означает, что величины P_n обновляются по следующей формуле:

$$P_n = E[T_n|A_{n-1}].$$

4. Величина, вычисляемая как разность между планируемым объемом финансирования на следующий год и объемом финансирования на текущий год:

$$k_n = E[T_{n+1}|A_n] - T_n,$$

является слагаемым для компенсатора K_n:

$$K_n = k_0 + k_1 + \dots + k_{n-1}.$$

Примечательно, что величины k_n не являются случайными на n-м году, поэтому последовательность K_n классифицируется как предсказуемая.

Разложение субмартингала T_n на слагаемые мартингал и компенсатор позволяет дать следующую интерпретацию: фактический объем финансирования городского проекта состоит из двух частей. Первая часть — это чисто случайная компонента (мартингал), которая не может быть предсказана. Вторая часть — это предсказуемая компонента (компенсатор), отражающая планируемый прирост объема финансирования городского проекта.

Модельный пример субмартингального разложения

Рассмотрим, как может быть организован процесс распределения финансовых ресурсов на городской проект с использованием субмартингального разложения.

В качестве примера возьмем финансирование городского проекта в течение 10 лет. Пусть изначальный план финансирования проекта состоит в следующих объемах (в условных единицах):

$$P_n = 100 + 2 \times n.$$

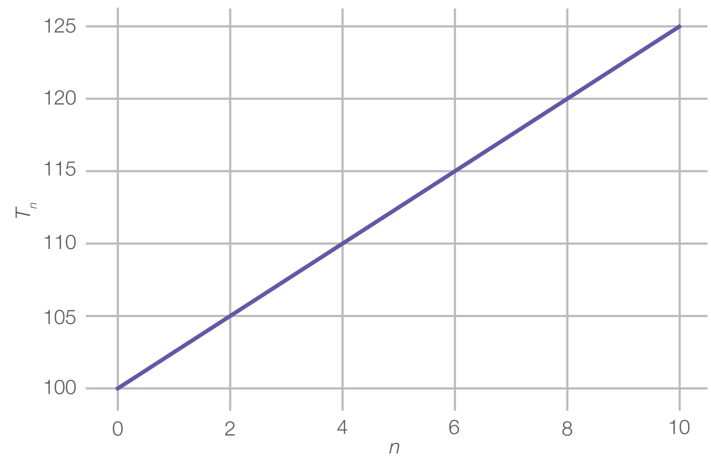

Рис. 1. Планируемый объем финансирования проекта на 10 лет

График этого финансирования приведен на рисунке 1.

Реальное распределение финансирования проекта будет подвержено случайным событиям, которые мы будем моделировать с помощью независимых одинаково распределенных случайных величин. Будем рассматривать случайные величины:

$$\xi_n \sim U\,[-1, 1].$$

Реальное распределение финансирования с учетом случайных явлений будем моделировать с помощью следующего случайного процесса:

$$T_n = \sum (P_k + \xi_k),$$

где суммирование ведется от 0 до n.

Проведем компьютерное моделирование этого процесса. Возможная траектория случайного процесса T_n представлена на рисунке 2.

Рассчитаем условное математическое ожидание для величин T_n следующим образом:

$$\mathrm{E}[T_{n+1}|A_n] = T_n + (100 + 2 \times n) + \mathrm{E}[\xi_{n+1}|A_n] =$$
$$= T_n + (100 + 2 \times n) + \mathrm{E}[\xi_n] = T_n + (100 + 2 \times \mathrm{n}).$$

Следовательно, мы имеем субмартингальное свойство:

$$\mathrm{E}[T_{n+1}|A_n] > T_n.$$

Согласно разложению Дуба, случайный процесс распределения финансовых ресурсов на моделируемый проект может быть представлен в виде:

$$T_n = M_n + K_n,$$

где мартингал M_n определяется по формуле:

$$M_n = \xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n,$$

а компенсатор K_n — по формуле:

$$K_n = 100 + 2 \times n.$$

В данном примере у нас получилось, что исходное планирование совпадает с компенсатором, который отражает плановые показатели на следующий год. Это произошло потому, что случайное воздействие было равномерным с нулевым средним. Теперь изменим пример, чтобы случайная величина имела положительное среднее. В качестве такой случайной величины возьмем:

$$\xi_n \sim U[0, 1].$$

Тогда, повторяя вычисления, мы можем убедиться, что процесс T_n является субмартингалом:

$$\mathrm{E}[T_{n+1}|A_n] = T_n + (100 + 2 \times n) + \mathrm{E}[\xi_{n+1}|A_n] =$$
$$= T_n + (100 + 2 \times n) + \mathrm{E}[\xi_n] = T_n + (100 + 2 \times n) + 0{,}5.$$

Разложение Дуба для этого субмартингала будет выглядеть следующим образом:

$$T_n = M_n + K_n,$$

где мартингал M_n определяется по формуле:

$$M_n = \xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n,$$

а компенсатор K_n — по формуле:

$$K_n = 100 + 2 \times n + n \times 0{,}5.$$

Перейдем к результатам компьютерного моделирования. На рисунке 3 даны значения объемов финансирования проекта по годам. На рисунке 4 приведены значения мартингала из разложения Дуба. Значения компенсатора выглядят как прямая линия.

Примеры финансирования городских проектов в Москве

Рассмотрим пример применения нашего алгоритма к городским проектам, реализуемым в Москве. Важно отметить, что данный подход может быть использован не только для анализа отдельных проектов, но и для их групп в совокупности.

В качестве примера исследуем динамику финансирования программы развития образования Москвы («Столичное образование») с 2015 по 2025 г., используя данные портала «Открытый бюджет города Москвы» [2]. На рисунке 5 представлен график, отражающий объемы финансирования проектов в рамках программы «Столичное образование».

Рассмотрим эти данные как значения субмартингала. Поскольку у нас отсутствует аналитическая формула для описания данных,

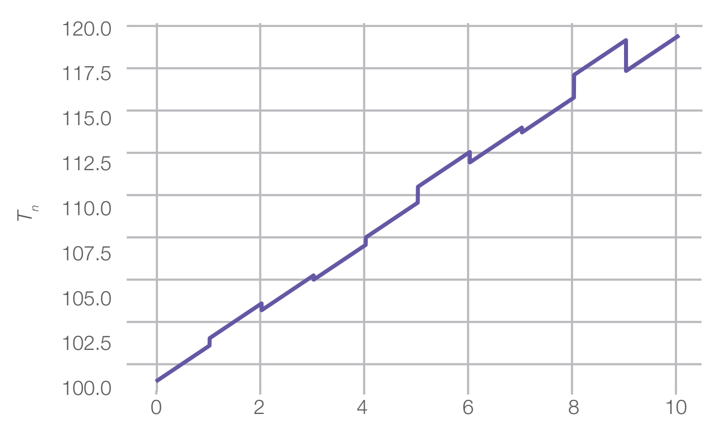

Рис. 2. Смоделированные объемы финансирования

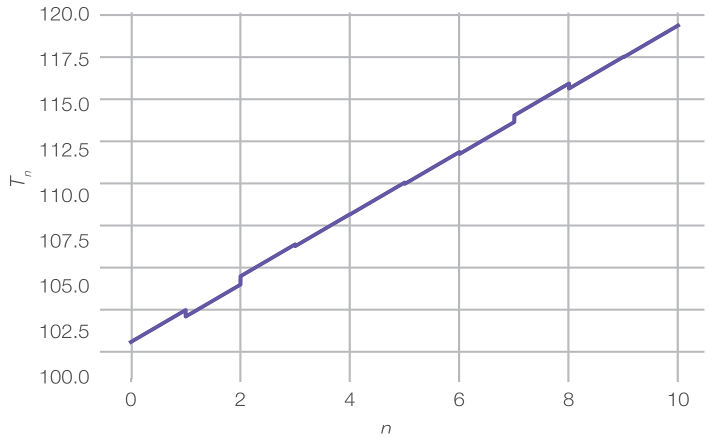

Рис. 3. Объемы финансирования городского проекта

воспользуемся методом выделения полиномиального тренда. Таким образом, мы разложим исходные данные на полиномиальный тренд и остатки. Такое разложение можно интерпретировать как разложение Дуба.

В нашем случае анализ показывает, что исходные данные содержат квадратичный тренд. На рисунке 6 представлены исходные данные и выделенный тренд, который мы интерпретируем как компенсатор в разложении Дуба.

На рисунке 7 приведены значения остатков, которые мы интерпретируем как значения мартингала в разложении Дуба.

Для того чтобы убедиться в том, что полученное разложение исходных данных на тренд и остатки можно интерпретировать как разложение Дуба для дискретного субмартингала, нужно проверить остатки на мартингальность. Для этого мы применили тест Льюнг — Бокса, который позволяет статистически проверить гипотезу об отсутствии автокорреляции в остатках [6]. В результате теста было получено p-value = 0,12, что превышает уровень значимости 0,05. Это позволяет сделать вывод об отсутствии статистически значимой автокорреляции в остатках, что подтверждает возможность интерпретации остатков как значений мартингала.

Заключение

В статье представлен новый алгоритм для анализа динамики финансирования городских проектов с использованием математического моделирования на основе субмартингального представления. Применяя разложение Дуба для дискретных субмартингалов, можно выделить структуру временно́го ряда, отражающего финансирование проекта по годам. Такое разложение позволяет глубже понять природу динамики финансирования проекта.

В работе продемонстрировано, что временной ряд финансирования проекта может быть представлен в виде суммы предсказуемой последовательности и мартингала, который интерпретируется как чистая случайная составляющая.

Разработан алгоритм для исследования динамики финансирования проекта, а также приведены модельные примеры, иллюстрирующие принцип его работы. Полученные теоретические результаты применены для анализа финансирования программы развития образования Москвы («Столичное образование») с 2015 по 2025 г.

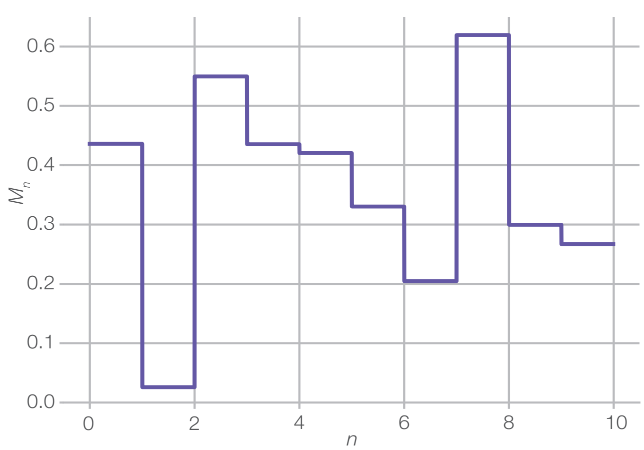

Рис. 4. Значения мартингала из разложения Дуба

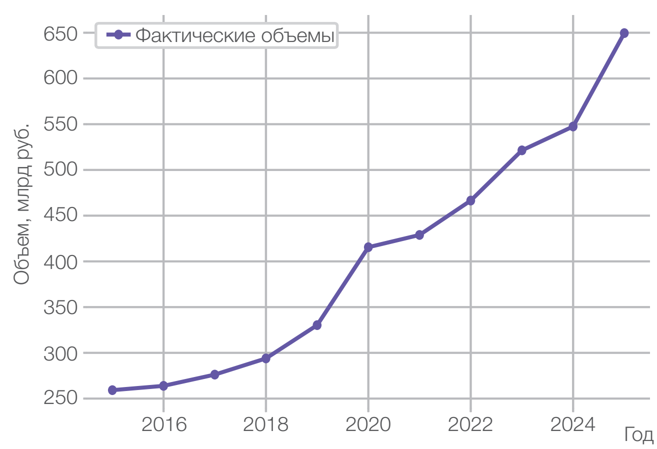

Рис. 5. Расходы на «Столичное образование»

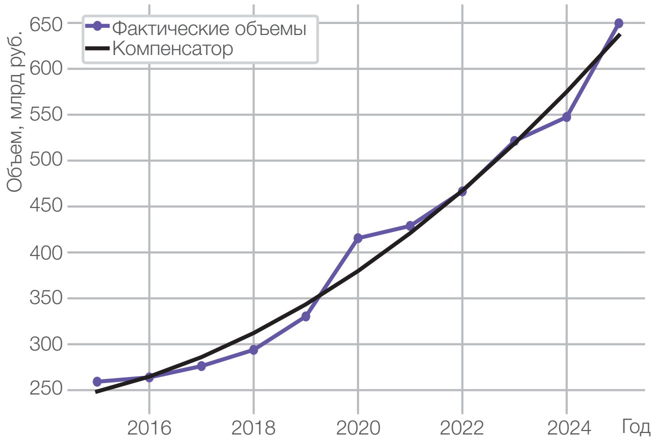

Рис. 6. Фактические объемы финансирования и компенсатор

Рис. 7. Значения мартингала

Информационные источники

1. Москва-2040. Создаем лучший город Земли: отчет Мэра Москвы С. С. Собянина о результатах деятельности Правительства Москвы. 34 с. URL: https://www.mos.ru/upload/newsfeed/news/cea8c9b542298048e154f2d7c0b7f1fb/Otchet_o_rezul_tatah_deyatel_nosti_Pravitel_stva_Moskvi_2024.pdf (дата обращения: 22.03.2025).
2. Правительство Москвы утвердило прогноз социально-экономического развития на 2025–2027 годы: Официальный портал Мэра и Правительства Москвы [сайт]. URL: https://www.mos.ru/mayor/themes/11877050/ (дата обращения: 22.03.2025).
3. Основные параметры бюджета // Открытый бюджет города Москвы: [сайт]. URL: https://budget.mos.ru/budget/ (дата обращения: 22.03.2025).
4. Булинский А. В., Ширяев А. Н. Теория случайных процессов. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. 402 с.
5. Дуб Дж. Л. Вероятностные процессы. М.: Издательство иностранной литературы, 1956. 605 с.
6. Box G. E. P., Pierce D. A. Distribution of Residual Autocorrelations in Autoregressive-Integrated Moving Average Time Series Models // Journal of the American Statistical Association. 1970. Vol. 65. No. 332. Pp. 1509–1526.

References

1. *Moscow-2040: Creating the Best City on Earth: Report by Mayor of Moscow S. S. Sobyanin on the Results of the Moscow Government's Activities.* 34 p. Available at: https://www.mos.ru/upload/newsfeed/news/cea8c9b542298048e154f2d7c0b7f1fb/Otchet_o_rezul_tatah_deyatel_nosti_Pravitel_stva_Moskvi_2024.pdf (accessed: 22.03.2025). (In Russ.).
2. The Moscow Government Approved the Forecast of Socio-Economic Development for 2025–2027. *The Mayor and the Government of Moscow Official Portal:* [website]. Available at: https://www.mos.ru/mayor/themes/11877050/ (accessed: 22.03.2025). (In Russ.).
3. Key Budget Parameters. *Open Budget of the City of Moscow:* [website]. Available at: https://budget.mos.ru/budget/ (accessed: 10.03.2025). (In Russ.).
4. Bulinsky A. V., Shiryaev A. N. *Teoriya Sluchainyh Protsessov* [Theory of Stochastic Processes]. Moscow: FIZMATLIT Publ., 2005. 402 p. (In Russ.).
5. Doob J. L. *Veroyatnostnye Protsessy* [Stochastic Processes]. Moscow: Foreign Literature Publishing House Publ., 1956. 605 p. (In Russ.).
6. Box G. E. P., Pierce D. A. Distribution of Residual Autocorrelations in Autoregressive-Integrated Moving Average Time Series Models. *Journal of the American Statistical Association,* 1970, vol. 65, no. 332, pp. 1509-1526.